Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

УТВЕРЖДАЮ
Директор Таганрогского института
имени А. П. Чехова (филиала)
РГЭУ (РИНХ)
______________ С. А. Петрушенко
«20» мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины
Многомерная геометрия

Направление подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль) программы бакалавриата
44.03.05.29 Математика и Информатика

Для набора 2025 года

Квалификация
Бакалавр

КАФЕДРА **математики и физики**

Распределение часов дисциплины по семестрам / курсам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**10 (5.2)**		Итого	
Недель	10			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	26	26	26	26
Итого ауд.	44	44	44	44
Контактная работа	44	44	44	44
Сам. работа	28	28	28	28
Итого	72	72	72	72

ОСНОВАНИЕ

Учебный план утвержден учёным советом вуза от 28.02.2025 протокол № 9.

Программу составил(и): канд. физ.-мат.наук, Доц., Забеглов Александр Валерьевич

Зав. кафедрой: Фирсова С.А.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Обеспечение математической подготовки специалистов, с направлением подготовки 44.03.05 Педагогическое образование;
1.2	Обучение студентов фундаментальным понятиям и основным методам дифференциальной геометрии;
1.3	Формирование теоретических знаний и практических навыков решения задач, необходимых в дальнейшей учебной и последующей профессиональной деятельности.

2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
ОПК-8:	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний
ОПК-8.1:	Владеет основами специальных научных знаний в сфере профессиональной деятельности
ОПК-8.2:	Осуществляет педагогическую деятельность на основе использования специальных научных знаний и практических умений в профессиональной деятельности
ПКО-1:	Способен осуществлять профессиональную деятельность с использованием возможностей цифровой образовательной среды образовательной организации и открытого информационно-образовательного пространства
ПКО-1.1:	Владеет средствами ИКТ для использования цифровых сервисов и разработки электронных образовательных ресурсов
ПКО-1.2:	Осуществляет планирование, организацию, контроль и корректировку образовательного процесса с использованием цифровой образовательной среды образовательной организации и открытого информационно-образовательного пространства
ПКО-1.3:	Использует ресурсы международных и национальных платформ открытого образования в про-фессиональной деятельности учителя основного об-щего и среднего общего образования
УК-1:	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
УК-1.1:	Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления и готовности к нему
УК-1.2:	Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
УК-1.3:	Анализирует источник информации с точки зрения временных и пространственных условий его возникновения
УК-1.4:	Анализирует ранее сложившиеся в науке оценки информации
УК-1.5:	Сопоставляет разные источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений
УК-1.6:	Аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение
УК-1.7:	Определяет практические последствия предложенного решения задачи

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
Знать:
особенности системного и критического мышления и готовность к нему (соотнесено с индикатором УК-1.1) логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности (соотнесено с индикатором УК-1.2) основы специальных научных знаний в сфере профессиональной деятельности (соотнесено с индикатором ОПК-8.1)
Уметь:
анализировать источник информации с точки зрения временных и пространственных условий его возникновения (соотнесено с индикатором УК-1.3) анализировать ранее сложившиеся в науке оценки информации (соотнесено с индикатором УК-1.4) сопоставлять разные источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений (соотнесено с индикатором УК-1.3) аргументированно формировать собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение (соотнесено с индикатором УК-1.6) осуществлять педагогическую деятельность на основе использования специальных научных знаний и практических умений в профессиональной деятельности (соотнесено с индикатором ОПК-8.2)

Владеть:
навыками применения методов количественного и качественного анализа, применяемых в системном подходе для решения задач в профессиональной деятельности (соотнесено с индикатором УК-1.1) владеть системой аргументации, направленной на формирование собственного суждения и оценки информации (соотнесено с индикатором УК-1.6) владеть действиями, направленными на определение практических последствий предложенного решения задачи (соотнесено с индикатором УК-1.7) владеть основами специальных научных знаний в сфере профессиональной деятельности (соотнесено с индикатором ОПК-8.1) иметь навыки осуществления педагогической деятельности на основе использования специальных научных знаний и практических умений в профессиональной деятельности (соотнесено с индикатором ОПК-8.2)

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Гиперплоскость в En

№	Наименование темы, краткое содержание	Вид занятия / работы / форма ПА	Семестр / Курс	Количество часов	Компетенции
1.1	Гиперплоскость как геометрический образ I порядка. Различные уравнения гиперплоскости.	Лекционные занятия	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
1.2	Расстояние от точки до гиперплоскости. Теорема о перпендикуляре. Формула для вычисления расстояния.	Лекционные занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
1.3	Угол между гиперплоскостями. Взаимное расположение гиперплоскостей.	Лекционные занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
1.4	Гиперплоскость как геометрический образ I порядка. Различные уравнения гиперплоскости.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6

					УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
1.5	Расстояние от точки до гиперплоскости. Теорема о перпендикуляре. Формула для вычисления расстояния.	Практические занятия	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
1.6	Угол между гиперплоскостями. Взаимное расположение гиперплоскостей.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
Раздел 2. Прямая в En					
№	**Наименование темы, краткое содержание**	**Вид занятия / работы / форма ПА**	**Семестр / Курс**	**Количество часов**	**Компетенции**
2.1	Различные уравнения прямой.Прямая как пересечение (n-1) гиперплоскостей.	Лекционные занятия	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.2	Расстояние от точки до прямой. Теорема о перпендикуляре.	Лекционные занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.3	Алгоритм вычисления расстояния от точки до прямой.	Лекционные занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1

					УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.4	Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и гиперплоскости.	Лекционные занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.5	Различные уравнения прямой.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.6	Прямая как пересечение (n-1) гиперплоскостей.	Практические занятия	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.7	Расстояние от точки до прямой.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.8	Теорема о перпендикуляре.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3

					УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.9	Алгоритм вычисления расстояния от точки до прямой.	Практические занятия	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.10	Угол между прямыми.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
2.11	Взаимное расположение прямой и гиперплоскости.	Практические занятия	10	2	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
Раздел 3. Гиперплоскость в En					
№	**Наименование темы, краткое содержание**	**Вид занятия / работы / форма ПА**	**Семестр / Курс**	**Количество часов**	**Компетенции**
3.1	Различные уравнения k-плоскости.	Самостоятельная работа	10	4	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
3.2	Расстояние от точки до k-плоскости.	Самостоятельная	10	4	УК-1

		работа			ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
3.3	Расстояние между k-плоскостью и l-плоскостью.	Самостоятельная работа	10	8	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
3.4	Угол между k-плоскостью (по Шилову Г.Е.).	Самостоятельная работа	10	6	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3
3.5	Угол между k -плоскостями (по Беклемешеву Л.А. и Проскурякову И.В.).	Самостоятельная работа	10	6	УК-1 ОПК-8 ПКО-1 УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 УК-1.4 УК-1.5 УК-1.6 УК-1.7 ОПК-8.1 ОПК-8.2 ПКО-1.1 ПКО-1.2 ПКО-1.3

4. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Структура и содержание фонда оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации представлены в Приложении 1 к рабочей программе дисциплины.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Учебные, научные и методические издания

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Библиотека / Количество
1	Рашевский, Петр Константинович	Риманова геометрия и тензорный анализ	М.: Едиториал УРСС, 2003	10 экз.

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Библиотека / Количество
2	Розендорн, Эмиль Ренольдович	Теория поверхностей: 2-е изд., перераб. и доп.	М.: Физматлит, 2006	3 экз.

5.1. Учебные, научные и методические издания

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Библиотека / Количество
1	Кархер, Г., Саймон, Л.	Минимальные поверхности	М.: Физматлит, 2003	5 экз.
2	Мищенко А. С., Фоменко А. Т.	Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии: учебник	Москва: Физматлит, 2004	http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69322

5.2. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Microsoft Office

5.3. Перечень программного обеспечения

5.4. Учебно-методические материалы для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости по заявлению обучающегося с ограниченными возможностями здоровья учебно-методические материалы предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям здоровья и восприятия информации. Для лиц с нарушениями зрения: в форме аудиофайла; в печатной форме увеличенным шрифтом. Для лиц с нарушениями слуха: в форме электронного документа; в печатной форме. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в форме электронного документа; в печатной форме.

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Помещения для всех видов работ, предусмотренных учебным планом, укомплектованы необходимой специализированной учебной мебелью и техническими средствами обучения:
- столы, стулья;
- персональный компьютер / ноутбук (переносной);
- проектор;
- экран / интерактивная доска.

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания по освоению дисциплины представлены в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины.

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

1.1 Показатели и критерии оценивания компетенций:

ЗУН, составляющие компетенцию	Показатели оценивания	Критерии оценивания	Средства оценивания
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач			
Знать: особенности системного и критического мышления и готовность к нему; логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности	Демонстрирует знания определений соответствий и отношений, свойств и способов задания отношений, основных понятий курса математики и других элементов, математические методов для обработки информации в профессиональной деятельности. Знает основные математические понятия и методы, необходимые для анализа и моделирования процессов и явлений, а также через решение практических задач, требующих аргументированного формирования суждений и оценки информации.	Полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос; правильные применение полученных знаний на практике; грамотное и логически стройное изложение материала при ответе на вопрос; правильное определение основных понятий; исчерпывающие ответы на уточняющие и дополнительные вопросы Количество (процент) правильно выполненных тестовых заданий	Вопросы к зачету ПЗ 1,2,3,4 Коллоквиум
Уметь: анализировать источник информации с точки зрения временных и пространственных условий его возникновения ; анализировать ранее сложившиеся в науке оценки информации ; сопоставлять разные источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений; аргументированно формировать собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение	Устанавливает способы задания конкретного отношения и формулировать его свойства, выполнять логические операции над высказываниями и предикатами, Умеет применять основные математические понятия и методы, необходимые для анализа и моделирования процессов и явлений, а также через решение практических задач, требующих аргументированного формирования суждений и оценки информации.	Полнота и правильность решения задач	ПЗ 1,2,3,4

ЗУН, составляющие компетенцию	Показатели оценивания	Критерии оценивания	Средства оценивания
Владеть: навыками применения методов количественного и качественного анализа, применяемых в системном подходе для решения задач в профессиональной деятельности; владеть системой аргументации, направленной на формирование собственного суждения и оценки информации; владеть действиями, направленными на определение практических последствий предложенного решения задачи;	Владеет методиками сопоставления разных источников информации. Применяет математические методов для обработки информации в профессиональной деятельности. Владеет основными математическими понятиями и методами, необходимыми для анализа и моделирования процессов и явлений, а также через решение практических задач, требующих аргументированного формирования суждений и оценки информации.	Правильность применения нормативно правовых актов; грамотная интерпретация полученных результатов, наличие выводов	Вопросы к зачету ПЗ 1,2,3,4 Коллоквиум

1.2 Шкалы оценивания:

Текущий контроль успеваемости и промежуточная аттестация осуществляется в рамках накопительной балльно-рейтинговой системы в 100-балльной шкале:

Форма контроля – зачет:

50-100 баллов – зачтено

0-49 баллов – незачтено

2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вопросы к зачету

I.Векторные пространства

1. Понятие векторного пространства
2. Конечномерные векторные пространства
3. Индексные обозначения. Правила суммирования
4. Формулы преобразования координат вектора при замене базиса
5. Подпространства векторного пространства

II. Линейные отображения и линейные операторы

6. Линейные отображения
7. Линейные операторы
8. Линейные преобразования векторного пространства. Полная линейная группа

III. Линейные, билинейные и квадратные формы

9. Линейные формы
10. Билинейные формы
11. Квадратичные формы. Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду

12. Метод выделения полных квадратов

IV. Евклидовы векторные пространства

13. Векторные пространства со скалярным произведением
14. Евклидовы векторные пространства
15. Симметрические линейные операторы
16. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

V. Аффинные и аффинно-евклидовы пространства

17. Понятие аффинного и аффинно-евклидова пространства
18. Формулы преобразования аффинных координат при замене репера

VI. Квадрики

19. Понятие квадрики. Задача приведения уравнения квадрики к каноническому виду
20. Классификация квадрик в E^2 и E^3

Задачи

I.Векторные пространства

1. Вектором назовем любую квадратную матрицу третьего порядка, элементами которой являются действительные числа. Сумму векторов и произведение вектора на число определим как сумму матриц и произведение матрицы на число. Докажите, что это множество векторов является векторным пространством. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого пространства.

2. Пусть L — множество прямых на плоскости, проходящих через точку пересечения прямых a и b и лежащих внутри одной из пар вертикальных углов, образованных прямыми a и b. Является ли векторным пространством множество направленных отрезков, коллинеарных прямым множества L?

3. В векторном пространстве V^4 в некотором базисе векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ заданы своими координатами: $\vec{a}_1(1,3,-4,8)$, $\vec{a}_2(-3,3,0,2)$, $\vec{a}_3(1,1,2,3)$, $\vec{a}_4(5,-1,0,0)$. Определите координаты следующих векторов: $\vec{p}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2+\vec{a}_4$, $\quad \vec{q}=5\vec{a}_1-3\vec{a}_2+2\vec{a}_3-\vec{a}_4$, $\quad \vec{s}=\frac{1}{2}\vec{a}_1-\vec{a}_2$.

4. Выясните, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $\vec{a}_1(1,3,-7)$, $\vec{a}_2(-4,1,5)$, $\vec{a}_3(-5,11,-11)$;

б) $\vec{a}_1(1,2,1)$, $\vec{a}_2(2,1,0)$, $\vec{a}_3(1,0,0)$, $\vec{a}_4(0,2,-1)$;

в) $\vec{a}_1(3,7,0,6,4)$, $\vec{a}_2(2,-1,3,0,10)$, $\vec{a}_3(5,6,3,6,14)$;

г) $\vec{a}_1(2,1,3,1)$, $\vec{a}_2(1,2,0,1)$, $\vec{a}_3(-1,1,-3,0)$.

5. Докажите, что следующие системы векторов образуют базис векторного пространства V^4:

а) $\vec{a}_1(0,1,1,1)$, $\vec{a}_2(1,0,1,1)$, $\vec{a}_3(1,1,0,1)$, $\vec{a}_4(1,1,1,0)$;

б) $\vec{a}_1(2,3,4,-3)$, $\vec{a}_2(-5,-4,-9,2)$, $\vec{a}_3(1,0,0,0)$, $\vec{a}_4(3,5,5,3)$.

6. Определите, являются ли следующие системы формулами преобразования координат векторного пространства V^3 при переходе от одного базиса к другому:

$$a)\begin{cases} x^1 = x^{1'} + 2x^{2'} + x^{3'}, \\ x^2 = -x^{1'} + 6x^{2'} + 2x^{3'}, \\ x^3 = 8x^{1'} + 3x^{3'}; \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} x^{1'} = 2x^1 + x^2 + 3x^3, \\ x^{2'} = 5x^1 + 4x^2 + 9x^3, \\ x^{3'} = 3x^1 + 3x^2 + 6x^3; \end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases} x^1 = x^{1'} + 3x^{2'} - 4x^{3'}, \\ x^2 = 4x^{1'} - 5x^{2'} - 14x^{3'}. \end{cases}$$

7. Напишите формулы преобразования координат вектора при переходе к новому базису, если известны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса:

а) $\vec{e}_{1'}(4,-1)$, $\vec{e}_{2'}(1,1)$;

б) $\vec{e}_{1'}(1,3,0)$, $\vec{e}_{2'}(1,1,-2)$, $\vec{e}_{3'}(0,3,-1)$;

в) $\vec{e}_{1'}(1,-1,5,10)$, $\vec{e}_{2'}(3,2,2,2)$, $\vec{e}_{3'}(5,-8,5,8)$, $\vec{e}_{4'}(11,-13,9,14)$;

г) $\vec{e}_{1'}(4,3,7,0,10)$, $\vec{e}_{2'}(0,5,-1,2,-1)$, $\vec{e}_{3'}(2,0,-1,8,11)$, $\vec{e}_{4'}(1,1,1,1,1)$, $\vec{e}_{5'}(6,2,0,-4,4)$.

8. Определите координаты новых базисных векторов в старом базисе, если известны формулы преобразования координат вектора при замене базиса:

$$a)\begin{cases} x^1 = x^{1'} - 3x^{2'} + x^{3'}, \\ x^2 = x^{1'} + x^{2'}, \\ x^3 = x^{1'}; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x^{1'} = x^1, \\ x^{2'} = -x^3, \\ x^{3'} = x^2, \\ x^{4'} = -x^4. \end{cases}$$

9. Векторы $\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$ и $\vec{v}$ векторного пространства V^3 заданы своими координатами в некотором базисе $B = \{\vec{e}_i\}$ $(i = \overline{1,3})$:

$$\vec{e}_{1'}(1,0,4),\ \vec{e}_{2'}(-4,1,6),\ \vec{e}_{3'}(0,0,2),\ \vec{v}(-4,8,2).$$

Докажите, что векторы $\{\vec{e}_{i'}\}$ $(i' = \overline{1',3'})$ сами образуют базис и найдите координаты вектора $\vec{v}$ в этом базисе.

10. В векторном пространстве V^3 задан базис $B = \{\vec{e}_i\}$ $(i = 1, ..., 3)$. Докажите, что каждая из систем векторов $\{\vec{e}_{i'}\}$ $(i' = 1', ..., 3')$ и $\{\vec{e}_{i''}\}$ $(i'' = 1'', ..., 3'')$ является базисом векторного пространства V^3, и найдите связь между координатами одного и того же вектора в этих базисах, если

$$\vec{e}_{1'}(0,2,1)_B, \quad \vec{e}_{2'}(1,0,7)_B, \quad \vec{e}_{3'}(2,2,0)_B,$$

$$\vec{e}_{1''} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{2''} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{e}_{3''} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

11. Докажите, что если $\{\vec{a}_i\}$ $(i = 1, ..., n)$ и $\{\vec{b}_\alpha\}$ $(\alpha = 1, ..., m)$ — базисы векторного пространства V, то $m = n$.

12. Докажите, что пересечение двух подпространств векторного пространства также является подпространством того же пространства.

13. Докажите, что линейная оболочка векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ векторного пространства V является подпространством пространства V, его размерность равна рангу матрицы, составленной из координат данных векторов в каком-либо базисе, а в качестве базиса этого подпространства можно взять любую линейно независимую подсистему данных векторов.

14. Найдите размерность и какой-нибудь базис подпространства W векторного пространства V^4, заданного следующей системой векторов: $\vec{a}_1(1,0,0,-1)$, $\vec{a}_2(2,1,1,0)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$, $\vec{a}_4(1,2,3,4)$, $\vec{a}_5(0,1,2,3)$.

15. Найдите размерность и какой-нибудь базис подпространства W векторного пространства V^5, являющегося линейной оболочкой векторов $\vec{a}_1(1,-4,3,7,0)$, $\vec{a}_2(-2,-1,5,10,9)$, $\vec{a}_3(-2,1,0,2,5)$, $\vec{a}_4(-1,2,2,1,4)$, $\vec{a}_5(3,-5,3,5,-5)$, $\vec{a}_6(1,-6,8,15,4)$.

16. В векторном пространстве V^n задан базис $B = \{\vec{e}_i\}$ $(i = 1, ..., n)$. Образует ли множество векторов $\vec{x}(x^i)_B$ подпространство векторного пространства V^n, если:

а) $x^1 + x^2 + ... + x^{n-1} + 5x^n = 0$;

б) $x^1 + x^2 + ... + x^n = -1$;

в) координаты с четными номерами равны нулю;

г) $x^1, x^2, ..., x^n$ — целые числа.

В случае положительного ответа найдите размерность и укажите какой-нибудь базис векторного подпространства.

II. Линейные отображения и линейные операторы

1. Докажите, что для линейного отображения $f : V \to W$ образ отображения есть подпространство векторного пространства W.

2. Докажите, что любое векторное пространство V^n изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$.

3. Линейный оператор f векторного пространства V^2 задан в некотором базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдите: а) образ вектора $\vec{x}(1, -1)_B$; б) матрицу линейного оператора в новом базисе $B' = \{\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}\}$, если $\vec{e}_{1'}(1, 2)_B$, $\vec{e}_{2'}(2, 3)_B$.

4. Линейное преобразование f векторного пространства V^3 задано в некотором базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора $\vec{x}(0, 2, -1)$ и праобраз вектора $\vec{y}(1, 1, 1)$.

5. Линейный оператор f векторного пространства V^3 задан в некотором базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ матрицей

$$F = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что линейный оператор f определяет линейное преобразование векторного пространства V^3. Найдите:

а) образ вектора $\vec{x}(1, 2, -4)_B$;

б) матрицу линейного оператора в базисе

$$\vec{e}_{1'}(2, 1, 5),\ \vec{e}_{2'}(0, 0, 1),\ \vec{e}_{3'}(1, 0, 2).$$

III. Линейные, билинейные и квадратные формы

1. В n-мерном векторном пространстве V задан базис $B = \{\vec{e}_i\}$, $(i = 1, ..., n)$. Докажите, что отображение $\omega : V \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $\vec{x}$ ставит в соответствие его i-ю координату в базисе B, является линейной формой на V.

2. В векторном пространстве V^4 задана билинейная форма g. Выпишите матрицу билинейной формы и выясните, является ли билинейная форма вырожденной, если

а) $g(\vec{x}, \vec{y}) = 3x^1y^1 - x^1y^2 + x^1y^4 - 2x^2y^1 - x^2y^2 + x^2y^4 + x^3y^1 - x^3y^2 + 11x^3y^3 + x^4y^4$;

б) $g(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 - 4x^1y^2 + 6x^1y^3 - x^1y^4 + 3x^3y^1 - 3x^3y^4 + 10x^4y^4$.

3. В векторном пространстве V^5 в некотором базисе B матрица билинейной формы g имеет вид

$$\text{а) } G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишите координатное выражение билинейной формы в базисе B и вычислите значение билинейной формы на векторах $\vec{x}(2, 0, -2, 0, 1)$ и $\vec{y}(1, -1, 3, 5, 3)$. Найдите ранг билинейной формы.

4. В векторном пространстве V^4 задана билинейная форма g, матрица которой в некотором базисе B имеет вид

$$\text{а) } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите координаты форм $Sym\ g$ и $Al\ g$.

5. Выпишите матрицы следующих квадратичных форм:

а) $\varphi(\vec{x}) = 5(x^1)^2 - 6(x^2)^2 - 4x^1x^2$ в векторном пространстве V^2;

б) $\varphi(\vec{x}) = 2x^1x^2 - x^1x^3 + 4x^2x^3$ в векторном пространстве V^3;

в) $\varphi(\vec{x}) = 2(x^1)^2 - x^1x^3 + 2x^2x^4 - 3x^3x^4$ в пространстве V^4;

г) $\varphi(\vec{x}) = 3(x^1)^2 + 2(x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^5)^2 + x^1x^2 - 4x^1x^5 + 2x^2x^4 - 8x^3x^5$ в векторном пространстве V^5.

6. В векторном пространстве V в некотором базисе B матрица квадратичной формы φ имеет вид

$$\text{а) } G = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{г) } G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишите координатное выражение квадратичной формы в базисе B.

7. Произведите преобразование переменных в квадратичной форме $\varphi(\vec{x}) = 7(x^1)^2 + 5(x^2)^2 + 2(x^3)^2 - 8x^1x^2 + 2x^1x^3 - 6x^2x^3$ по заданным формулам

$$\begin{cases} x^1 = y^1 + y^2 + y^3, \\ x^2 = y^1 + 2y^2 + 2y^3, \\ x^3 = y^1 + y^2 + 2y^3. \end{cases}$$

IV. Евклидовы векторные пространства

1. В евклидовом векторном пространстве V^2 в ортонормированном базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ дана квадратичная форма φ. Используя ортогональное преобразование, приведите квадратичную форму к каноническому виду. Укажите новый ортонормированный базис и запишите формулы преобразования координат:

а) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 + 9(x^2)^2$;

б) $\varphi(\vec{x}) = 7(x^1)^2 - 24x^1x^2$;

в) $\varphi(\vec{x}) = 2x^1x^2$;

г) $\varphi(\vec{x}) = 6(x^1)^2 + 24x^1x^2 - (x^2)^2$;

д) $\varphi(\vec{x}) = 3(x^1)^2 - 6x^1x^2 + 3(x^2)^2$.

2. В евклидовом векторном пространстве V^3 в ортонормированном базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ дана квадратичная форма φ. Используя ортогональное преобразование, приведите квадратичную форму к каноническому виду. Укажите новый ортонормированный базис и запишите формулы преобразования координат:

а) $\varphi(\vec{x}) = 3(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 7(x^3)^2 - 6x^1x^2 - 2x^1x^3 + 2x^2x^3$;

б) $\varphi(\vec{x}) = 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3$;

в) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 - (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 4x^2x^3$;

г) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + 9(x^2)^2 + (x^3)^2 - 6x^1x^2 + 2x^1x^3 - 6^2x^3$;

д) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 16(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 8x^1x^3 - 8x^2x^3$;

е) $\varphi(\vec{x}) = (x^3)^2 + 4x^1x^2$;

ж) $\varphi(\vec{x}) = 6(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 8x^1x^2$;

з) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 - 2(x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 8x^1x^3 - 4x^2x^3$;

и) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 + 4x^2x^3$;

к) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + 4(x^2)^2 + (x^3)^2 - 4x^1x^2 - 2x^1x^3 + 4x^2x^3$.

3. В евклидовом векторном пространстве V^4 в ортонормированном базисе $B = \{\vec{e}_i\}, (i = \overline{1,4})$ дана квадратичная форма φ. Используя ортогональное преобразование, приведите квадратичную форму к каноническому виду. Укажите новый ортонормированный базис и запишите формулы преобразования координат:

а) $\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 2x^1x^2 + 4x^3x^4$;

б) $\varphi(\vec{x}) = 2(x^1)^2 - (x^2)^2 - 3(x^4)^2 + 4x^3x^4$;

в) $\varphi(\vec{x}) = 2x^1x^2 - 6x^1x^3 - 6x^2x^4 + 2x^3x^4$;

г) $\varphi(\vec{x}) = x^1x^2 + x^3x^4$.

V. Аффинные и аффинно-евклидовы пространства

1. Пусть $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ — аффинный репер в пятимерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^5$. Найдите координаты точек E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, P, M, N, K, L в репере R, если

$$\overrightarrow{OE}_1 = \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OE}_2 = \vec{e}_2,\ \overrightarrow{OE}_3 = \vec{e}_3,\ \overrightarrow{OE}_4 = \vec{e}_4,\ \overrightarrow{OE}_5 = \vec{e}_5,$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5,\ \overrightarrow{OM} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 3\vec{e}_5,$$

$$\overrightarrow{ON} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5,\ \overrightarrow{OK} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 4\vec{e}_5,\ \overrightarrow{OL} = -\vec{e}_3 - 6\vec{e}_5.$$

2. В некоторой аффинной системе координат даны координаты точек $O(1,2,1)$, $A_1(0,1,0)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(-1,1,0)$. Можно ли точку O принять за начало новой системы координат, а векторы $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_2$, $\overrightarrow{OA}_3$ — за новые базисные векторы?

3. В некоторой аффинной системе координат даны координаты точек $O(1,0,0,0,0)$, $A_1(0,2,0,0,0)$, $A_2(0,0,1,0,0)$, $A_3(0,0,0,-3,1)$, $A_4(0,0,0,0,1)$, $A_5(0,0,0,0,0)$. Можно ли точку O принять за начало новой системы координат, а векторы $\overrightarrow{OA}_i$ $(i = 1,...,5)$ — за новые базисные векторы?

4. Напишите формулы преобразования координат, если даны координаты нового начала и новых базисных векторов относительно старой системы координат:

а) $O'(0,0)$, $\vec{e}_{1'}(1,1)$, $\vec{e}_{2'}(4,-1)$;

б) $O'(0,3,-1)$, $\vec{e}_{1'}(1,3,0)$, $\vec{e}_{2'}(1,1,-2)$, $\vec{e}_{3'}(0,3,-1)$;

в) $O'(-3,-1,2,5)$, $\vec{e}_{1'}(9,-8,5,10)$, $\vec{e}_{2'}(3,2,2,2)$, $\vec{e}_{3'}(5,-8,5,8)$, $\vec{e}_{4'}(11,-13,9,15)$.

5. В некоторой аффинной системе координат даны координаты точек $O(0,0,0,0)$, $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(1,0,0,0)$, $A_4(0,0,0,1)$. Напишите формулы перехода к новой системе координат с началом A_2 и базисными векторами $\vec{e}_{1'} = \overrightarrow{A_2O}$, $\vec{e}_{2'} = \overrightarrow{A_2A_1}$, $\vec{e}_{3'} = \overrightarrow{A_2A_3}$, $\vec{e}_{4'} = \overrightarrow{A_2A_4}$.

6. Запишите формулы преобразования координат точек аффинного пространства $\mathbb{A}^5$ при переходе к новой системе координат, если

а) координатные векторы остаются прежними, а новым началом является точка $O'(2,0,-2,0,1)$;

б) начало координат остается прежним. а новые координатные векторы выражаются через старые следующим образом:
$\vec{e}_{1'} = \vec{e}_1 + \vec{e}_5, \quad \vec{e}_{2'} = -\vec{e}_4, \quad \vec{e}_{3'} = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{4'} = -\vec{e}_2, \quad \vec{e}_{5'} = \vec{e}_1 - \vec{e}_5.$

7. В пространстве $\mathbb{A}^4$ даны пять точек: $C_0(1,0,0,2)$, $C_1(0,1,2,0)$, $C_2(2,0,0,2)$, $C_3(0,2,1,0)$, $C_4(2,0,0,1)$. Запишите формулы преобразования координат точек аффинного пространства, приняв точку C_0 за новое начало координат, а векторы $\overrightarrow{C_0C_1}$, $\overrightarrow{C_0C_2}$, $\overrightarrow{C_0C_3}$, $\overrightarrow{C_0C_4}$ — за новые координатные векторы.

8. Определите координаты новых базисных векторов и нового начала координат в старой системе, если известны формулы преобразования координат (x^i — координаты в старой системе, $x^{i'}$ — координаты в новой системе):

$$\text{а)}\ \begin{cases} x^{1'} = x^1 - 1, \\ x^{2'} = x^2 + 1, \\ x^{3'} = x^3 - 5, \\ x^{4'} = -x^4; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'} + ... + x^{n'} + 1, \\ x^2 = x^{2'} + x^{3'} + ... + x^{n'} + 2, \\ x^3 = x^{3'} + x^{4'} + ... + x^{n'} + 3, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = x^{n'} + n. \end{cases}$$

9. Задают ли преобразования аффинных координат в пространствах $\mathbb{A}^4$ и $\mathbb{A}^5$ соответственно следующие формулы:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x^{1'} = x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 1, \\ x^{2'} = x^1 - 3x^2 + 4x^4 + 2, \\ x^{3'} = 5x^1 + 7x^2 - 8x^3 + 6x^4 - 5, \\ x^{4'} = 3x^1 + 4x^2 - x^3 + 5x^4 - 3. \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'} + x^{3'}, \\ x^2 = x^{2'} - x^{3'} - 1, \\ x^3 = x^{3'} + 2, \\ x^4 = -x^{3'} + x^{4'} - 1, \\ x^4 = x^{3'} + x^{4'} + x^{5'}. \end{cases}$$

Если да, то найдите координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

10. Множество точек пространства $\mathbb{A}^3$ в некоторой аффинной системе координат задано уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \frac{1}{2}(x^3)^2 + x^1x^3 - x^2x^3 = 3.$$

Напишите уравнение этого множества в новой системе координат, если формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x^{1'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^2), \\ x^{2'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x^1 - x^2 + x^3), \\ x^{3'} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x^1 - x^2 - 2x^3). \end{cases}$$

11. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ найдите расстояние между следующими парами точек:

а) $A(-3, 6, -7, 1)$, $B(1, 6, -4, 1)$; в) $C(8, -4, 2, 3)$, $D(2, 1, 6, 5)$;
б) $E(10, -2, 6, 4)$, $F(6, 2, 2, 0)$; г) $K(11, 3, -5, 1)$, $M(7, 7, -9, 5)$.

12. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ найдите расстояние между следующими парами точек:

а) $A(3, -4, 5, 1, 2)$, $B(2, 1, 0, -2, 0)$;

б) $E(1, 0, -7, 5, 2)$, $F(4, 5, -6, 4, 2)$;

в) $C(7, 2, -3, 1, 5)$, $D(3, 1, -1, 3, 5)$;

г) $K(16, 5, 3, -2, 7)$, $M(10, 5, -1, 3, 5)$.

13. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ известны координаты вершин $A(1, 4, 2, -1, 3)$, $B(1, 2, -2, 3, 3)$, $C(-2, -1, 1, -2, 3)$ треугольника ABC. Докажите, что треугольник равнобедренный.

14. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ известны координаты вершин $A(4, 3, 2, -1)$, $B(4, -1, 5, -1)$, $C(5, 6, 6, 1)$ треугольника ABC. Докажите, что треугольник прямоугольный.

15. В пространстве $\mathbb{E}^4$ в некотором ортонормированном репере

$$R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$$

даны координаты нового начала $O'(1, 2, -3, 4)$ и новых координатных векторов

$$\vec{e}_{1'}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \vec{e}_{2'}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$
$$\vec{e}_{3'}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \vec{e}_{4'}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Является ли новый репер ортонормированным? Запишите формулы преобразования координат точки при переходе от старого репера к новому.

VI. Квадрики

1. В аффинном пространстве $\mathbb{A}^2$ приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к реперу, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1 - 4x^2 - 12 = 0$;

б) $4x^1x^2 - (x^2)^2 - 8x^1 + 8x^2 - 8 = 0$;

в) $(x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 2x^1 - 5 = 0$;

г) $4x^1x^2 - 3(x^2)^2 + 12x^2 - 12 = 0$;

д) $(x^1)^2 + 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 2x^1 - 2x^2 - 2 = 0$;

е) $-(x^1)^2 + 6x^1x^2 + 7(x^2)^2 + 12x^1 + 28x^2 + 28 = 0$;

ж) $(x^1)^2 - 2x^1x^2 + 5(x^2)^2 - 4x^1 + 12x^2 + 8 = 0$;

з)$(x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 6x^1 - 10x^2 + 25 = 0$;

и) $(x^1)^2 + 6x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 6x^1 + 2x^2 - 7 = 0$;

к) $3(x^1)^2 + 10x^1x^2 + 3(x^2)^2 + 2x^1 + 14x^2 - 53 = 0$;

л) $5(x^1)^2 + 8x^1x^2 + 5(x^2)^2 - 18x^1 - 18x^2 + 9 = 0$.

2. В аффинном пространстве $\mathbb{A}^2$ приведите к нормальному виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к реперу, в котором уравнение квадрики имеет нормальный вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $(x^1)^2+6x^1x^2+(x^2)^2+6x^1+2x^2-1=0$;

б) $9(x^1)^2-6x^1x^2+(x^2)^2-12x^1+4x^2+3=0$;

в) $3(x^1)^2-2x^1x^2-(x^2)^2-4x^1+1=0$;

г) $(x^1)^2+4x^1x^2+4(x^2)^2-6x^1-8x^2+5=0$.

3. В аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к реперу, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $(x^1)^2-5(x^3)^2+2x^1x^2-2x^2x^3+4x^2+10x^3-3=0$;

б) $(x^1)^2+(x^2)^2+8(x^3)^2-2x^1x^2+4x^1x^3-2x^1-6x^2+4x^3+5=0$;

в) $(x^1)^2+4x^2x^3-2x^1+8x^2+5=0$;

г) $(x^1)^2+2(x^2)^2+2(x^3)^2-2x^1x^2-2x^1x^3-2x^1+8x^3-6=0$;

д) $(x^1)^2+4(x^2)^2+(x^3)^2-4x^1x^2+2x^1x^3-4x^2x^3+2x^1-4x^2+2x^3+1=0$;

е) $9(x^1)^2+5(x^2)^2+9(x^3)^2-12x^1x^2-6x^2x^3+12x^2-36x^3=0$;

ж) $2(x^1)^2+10(x^2)^2-2(x^3)^2+12x^1x^2+8x^2x^3+12x^1+4x^2-8x^3-1=0$;

з) $(x^1)^2+4(x^2)^2+4x^1x^3-2x^2x^3=0$;

и) $2(x^1)^2+2(x^2)^2+2(x^3)^2+4x^1x^2-4x^1x^3-4x^2x^3+$
$+5x^1+5x^2-5x^3+2=0$;

к) $2(x^1)^2+(x^2)^2+8(x^3)^2-2x^1x^2-6x^1x^3+4x^2x^3+$
$+2x^1+2x^2+4x^3-14=0$.

4. В аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ приведите к нормальному виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к реперу, в котором уравнение квадрики имеет нормальный вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $4(x^1)^2+6(x^2)^2+5(x^3)^2+4x^1x^3-8x^2-4x^3+3=0$;

б) $x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3-4x^2+2x^3=0$;

в) $x^1x^2+2x^1+4x^2-6x^3+2=0$;

г) $2(x^1)^2+(x^2)^2+2(x^3)^2-2x^1x^2-2x^2x^3+4x^1-2x^2=0$;

д) $(x^1)^2-3(x^3)^2-2x^1x^3-6x^2x^3+2x^1+4x^3+1=0$.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^2$ приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному реперу, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $3(x^1)^2 + 10x^1x^2 + 3(x^2)^2 - 2x^1 - 14x^2 - 13 = 0$;

б) $25(x^1)^2 - 14x^1x^2 + 25(x^2)^2 + 64x^1 - 64x^2 - 224 = 0$;

в) $7(x^1)^2 + 6x^1x^2 - (x^2)^2 + 28x^1 + 12x^1x^2 + 28 = 0$;

г) $4x^1x^2 + 3(x^2)^2 + 16x^1 + 12x^2 - 36 = 0$;

д) $19(x^1)^2 + 6x^1x^2 + 11(x^2)^2 + 38x^1 + 6x^2 + 29 = 0$;

е) $5(x^1)^2 - 2x^1x^2 + 5(x^2)^2 - 4x^1 + 20x^2 + 20 = 0$;

ж) $(x^1)^2 - 6x^1x^2 + 9(x^2)^2 + 10x^1 + 70x^2 = 0$;

з) $4(x^1)^2 + 4x^1x^2 + (x^2)^2 - 20x^1 - 10x^2 + 5 = 0$;

и) $5(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 2(x^2)^2 + 2x^1 + 4x^2 - 7 = 0$;

к) $(x^1)^2 - 6x^1x^2 + (x^2)^2 + 6x^1 - 2x^2 + 1 = 0$.

6. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик и определите их вид. Запишите формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному реперу, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид. Укажите координаты нового начала и новых координатных векторов.

а) $(x^1)^2 + 5(x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2 + 6x^1x^3 + 2x^2x^3 - 2x^1 + 6x^2 + 2x^3 = 0$;

б) $2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2(x^3)^2 - 2x^1x^2 + 2x^2x^3 + 4x^1 - 2x^2 = 0$;

в) $7(x^1)^2 + 6(x^2)^2 + 5(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3 - 6x^1 - 24x^2 + 18x^3 + 30 = 0$;

г) $2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 2x^1 - 4x^2 + 4x^3 + 2 = 0$;

д) $2(x^1)^2 + 5(x^2)^2 + 2(x^3)^2 - 2x^1x^2 - 4x^1x^3 + 2x^2x^3 +$
$+2x^1 - 10x^2 - 2x^3 - 1 = 0$;

е) $4(x^1)^2 + (x^2)^2 + 5(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 50x^2 - 10x^3 - 70 = 0$;

ж) $(x^1)^2 + 5(x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2 + 6x^1x^3 + 2x^2x^3 - 2x^1 + 6x^2 + 2x^3 = 0$;

з) $(x^3)^2 - 4x^1 + 3x^2 + 2x^3 + 3 = 0$;

и) $(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 6x^1 - 12x^2 + 18 = 0$;

к) $9(x^1)^2 + 3(x^2)^2 - 4x^2x^3 - 24x^2 - 8x^3 - 24 = 0$;

л) $3(x^2)^2 + 12x^1 - 3x^2 + 5x^3 + 2 = 0$.

6. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик:

а) $5(x^1)^2 - (x^2)^2 - 8x^1x^2 - 2x^3x^4 - 1 = 0;$

б) $(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x_4)^2 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0.$

Зачетный контроль (билет) включает 2 теоретических вопроса (формируются из представленных вопросов к зачету) и 2 задачи (формируются из перечня заданий, представленных в разделе Задачи).

Критерии оценивания:
Максимальное количество баллов за зачетное задание – 100 (50 баллов максимально за теоретические вопросы, 50 баллов максимально за задачи).

Критерии оценивания одного теоретического вопроса.

Критерии оценивания теоретического вопроса	Баллы
Изложенный материал фактически верен, наличие глубоких исчерпывающих знаний; правильные, уверенные действия по применению полученных знаний на практике, грамотное и логически стройное изложение материала при ответе	21-25
Наличие твердых и достаточно полных знаний, правильные действия по применению знаний на практике, четкое изложение материала, допускаются отдельные логические и стилистические погрешности, неуверенность и неточность ответов на дополнительные и наводящие вопросы	17-20
Неполный ответ на вопросы; затрудняется ответить на дополнительные вопросы	1-16
Ответ не связан с вопросами, наличие грубых ошибок в ответе, непонимание сущности излагаемого вопроса, неумение применять знания на практике, неуверенность и неточность ответов на дополнительные и наводящие вопросы	0
Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос	*25*

Критерии оценивания одной задачи.

Критерии оценивания задач	Баллы
Задача выполнена в полном объеме, в представленном решении обоснованно получены правильные ответы, проведен анализ, дана грамотная интерпретация полученных результатов, сделаны выводы	21-25
Задача выполнена в полном объеме, но при анализе и интерпретации полученных результатов допущены незначительные ошибки, выводы – достаточно обоснованы, но неполны	17-20
Задача выполнена не в полном объеме, при анализе и интерпретации полученных результатов допущены ошибки, выводы – но неполные или отсутствуют	1-16
Задача выполнена полностью неверно или отсутствует решение	0
Максимальный балл за решение задачи	*25*

Итоговая оценка формируется из суммы набранных баллов за выполнение зачетного задания (2 теоретических вопроса и 2 задачи) и соответствует шкале:

50-100 баллов – зачтено

0-49 баллов – не зачтено

Проверочные работы

Проверочная работа I.Векторные пространства.

Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу I.

Проверочная работа II. Линейные отображения и линейные операторы

Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу II.

Проверочная работа III. Линейные, билинейные и квадратные формы

Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу III.

Проверочная работа IV. Евклидовы векторные пространства

Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу IV.
Проверочная работа V. Аффинные и аффинно-евклидовы пространства
Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу V.
Проверочная работа VI. Квадрики
Один из теоретических вопросов раздела I и одна задача разделу VI.

Проверочная работа I (максимально 10 баллов)
Проверочная работа II (максимально 10 баллов)
Проверочная работа III(максимально 10 баллов)
Проверочная работа IV (максимально 10 баллов)
Проверочная работа V (максимально 10 баллов)
Проверочная работа VI (максимально 10 баллов)

Критерии оценки проверочных работ.

8-10 баллов – обучающийся самостоятельно и правильно выполнил проверочную работу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагал свое решение, используя профессиональные понятия, правильно интерпретировал полученные значения;

5-7 баллов – обучающийся самостоятельно и в основном правильно выполнил проверочную работу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагал свое решение, не все показатели интерпретировал верно;

3-4 баллов – обучающийся не полностью выполнил проверочную работу, допустил ошибки в интерпретации полученных показателей;

0-2 баллов – проверочная работа не выполнена.

Коллоквиум (40 баллов)
Вопросы к коллоквиуму
I.Векторные пространства
1. Понятие векторного пространства
2. Конечномерные векторные пространства
3. Индексные обозначения. Правила суммирования
4. Формулы преобразования координат вектора при замене базиса
5. Подпространства векторного пространства

II. Линейные отображения и линейные операторы
6. Линейные отображения
7. Линейные операторы
8. Линейные преобразования векторного пространства. Полная линейная группа

III. Линейные, билинейные и квадратные формы
9. Линейные формы
10. Билинейные формы
11. Квадратичные формы. Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду
12. Метод выделения полных квадратов

IV. Евклидовы векторные пространства
13. Векторные пространства со скалярным произведением
14. Евклидовы векторные пространства
15. Симметрические линейные операторы
16. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

V. Аффинные и аффинно-евклидовы пространства
17. Понятие аффинного и аффинно-евклидова пространства
18. Формулы преобразования аффинных координат при замене репера

VI. Квадрики

19. Понятие квадрики. Задача приведения уравнения квадрики к каноническому виду

20. Классификация квадрик в E^2 и E^3

Критерии оценки.

35-40 баллов Даны исчерпывающие и обоснованные ответы на все поставленные вопросы, при ответах выделялось главное, развернутый ответ без принципиальных ошибок; логически выстроенное содержание ответа; мысли излагались в логической последовательности; показано умение самостоятельно анализировать факты, события, явления, процессы в их взаимосвязи и диалектическом развитии; полное знание терминологии по данной теме; четкое выделение причинно-следственных связей между основными категориями; умение ответить на вопрос без использования индивидуального письменного конспекта; использование презентационных материалов
30-34 баллов Даны полные, достаточно обоснованные ответы на поставленные вопросы; при ответах не всегда выделялось главное, отдельные положения недостаточно увязывались с требованиями программы, ответы в основном были краткими, но не всегда четкими; практически полное знание терминологии данной темы; использование презентационных материалов
25-29 баллов Даны в основном правильные ответы на все поставленные вопросы, но без должной глубины и обоснования, на уточняющие вопросы даны правильные ответы; при ответах не выделялось главное; ответы были многословными, нечеткими и без должной логической последовательности; на отдельные дополнительные вопросы не даны положительные ответы
20 – 24 баллов Неполный ответ на вопрос; неполное знание терминологии; наличие некоторых существенных ошибок в изложении основных фактов, теорий; неумение провести логические параллели, выводы; неумение выделить причины и следствия важнейших категорий; неспособность ответить без помощи письменного конспекта; знание основной литературы, рекомендованной к семинару.
0 – 20 баллов Студент затрудняется при ответе на вопросы, работа проводится с опорой на преподавателя; отсутствие прямого ответа на поставленный вопрос либо ответ, содержащий бессистемную, минимальную информацию; отсутствие логических связей в ответе; отсутствие знания терминологии по теме семинара.

3 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедуры оценивания включают в себя текущий контроль и промежуточную аттестацию.

Текущий контроль успеваемости проводится с использованием оценочных средств, представленных в п. 2 данного приложения. Результаты текущего контроля доводятся до сведения обучающихся до промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета.

Зачет проводится по расписанию промежуточной аттестации в устном виде. Количество вопросов в зачетном задании (билете) – 4 (2 теоретических вопроса и 2 задачи). Объявление результатов производится в день зачета. Результаты аттестации заносятся в ведомость и зачетную книжку обучающегося.

Обучающиеся, не прошедшие промежуточную аттестацию по графику промежуточной аттестации, должны ликвидировать задолженность в установленном порядке.

Приложение 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебным планом предусмотрены следующие виды занятий:

- лекции;
- практические занятия.

В ходе лекционных занятий рассматриваются основные понятия и теоретические вопросы.

В ходе практических занятий развиваются умения решать задачи.

При подготовке к практическим занятиям каждый обучающийся должен:

- изучить рекомендованную учебную литературу;
- изучить конспекты лекций;
- подготовить ответы на вопросы по изучаемой теме.

Углубленное изучение вопросов лекционных занятий, а также вопросов, не рассмотренных на лекциях и практических занятиях, должны быть изучены обучающимися в ходе самостоятельной работы. Контроль самостоятельной работы обучающихся осуществляется в ходе занятий посредством выполнения задач. В ходе самостоятельной работы каждый обучающийся обязан прочитать основную и по возможности дополнительную литературу по изучаемой теме, дополнить конспекты лекций недостающим материалом, выписками из рекомендованных первоисточников. Выделить непонятные термины, найти их значение в литературе.

Для подготовки к занятиям, текущему контролю и промежуточной аттестации обучающиеся могут воспользоваться электронно-библиотечными системами.